Àlgebra a l'ESO per a tothom. Reinventant a partir del context

P.Cobo, J.Comellas, J. Giménez, J.Serra, M. Sol, X. Vilella
(Grup Vilatzara - ICE UAB)

Es presenten alguns moments significatius d'una seqüència didàctica, realitzada a primer cicle d'ESO. Mostren el valor del context i els raonaments heurístics, per a un treball competent d'àlgebra que sigui ric matemàticament i adaptat a la diversitat de l'alumnat.

El professorat sabem la importància que té l'àlgebra en l'aprenentatge de les matemàtiques, així com també de les dificultats que suposa per als nostres alumnes. Quan hem insistit en el seu ensenyament per les vies més tradicionals, poc a poc acabem fent un reduccionisme del tema i acabem centrant-nos en la resolució d'equacions i proposant a l'alumnat activitats per treballar uns processos mecànics i rutinaris. La via s'esgota de seguida i ens porta a un punt mort. És a dir, els alumnes que tinguin dificultats per aprendre aquestes tècniques només podem insistir en repetir més i mes aquests tipus d'exercicis fins que la motivació els abandoni abans d'haver-les après. Així, aquests alumnes hauran quedat exclosos per la resta d'activitats del tema. Els alumnes que sí que han après aquestes tècniques se sentiran satisfets. Però no ens enganyem, l'aprenentatge purament mecànic s'oblida amb facilitat i és poc interessant per a l'alumnat.

Des de ja fa alguns anys, ens hem proposat buscar nous enfocaments amb tres idees bàsiques. La primera, presentar l'àlgebra com una eina que ajudi a pensar i a resoldre problemes. La segona, que la proposta valori el context i les representacions, per a que l'alumnat assoleixi significats i estableixi connexions. La tercera, és que en aquest procés tingui cabuda tothom. En efecte, no podem admetre que hi hagi alumnes que quedin exclosos.

Per tot això decidim exposar-vos alguns moments significatius d'una seqüència didàctica, que mostren el valor del context en alguns exemples particulars. Sabem que el què expliquem no esgota tot el que hem realitzat, i que per a alguns no és nou, però consideràvem que valia la pena comunicar-ho en un número de BIAIX monogràfic sobre el tema.

La novetat principal està en reflexionar sobre la naturalitat de les respostes dels estudiants, promoguda per una gestió del treball que demana sempre la justificació constant. Tanmateix no és un plantejament nou per aquells que coneixen l'Educació Matematica Realistica (EMR). Ja en treballs de fa 20 anys, vam introduir (Gimenez i al 1988) la idea de començar l'àlgebra amb dues variables, buscant quants caramels hem amagat, a l'estil de les propostes amb preus de samarretes (M.Kindt i al, 1998) i ara ho estem redescobrint de nou amb més profunditat. Amb aquest estil de treball aconseguim que l'alumnat utilitzi espontàniament lletres per a representar els preus i que és el pas previ a l'ús de símbols en el sentit clàssic. Això ens porta de forma natural, entre altres coses, a utilitzar taules per a mostrar els intercanvis. A partir d'aquí, s'introdueix una notació matricial que fa servir només els nombres (coeficients) per a representar les situacions, i posar de manifest les combinacions linials. Aquest és l'anomenat procés de reinvenció que té lloc segurament amb la influència d'haver donat diversos exemples.

Tot i que en aquest procés els estudiants reconeixen estratègies d'alt nivell, es mantenen molts d'ells en el procés heurístic de prova (assaig-error), que permet dir que la pràctica totalitat de l'alumnat arriba a resoldre les situacions i a interessar-se per elles. Per això, cal introduir noves combinacions en el procès, per a reconèixer les propietats dels processos de resolució com a generalitzables. Aquest guiatge per mitjà d'un planteig cíclic, és el que revela el paper anomenat proactiu (Gravemeijer i al ,1998) del docent. En efecte, el docent recolza el desenvolupament de significats individuals i col.lectius dels estudiants, contribuint a l'emergència dels continguts (Kindt 2004).

La significativitat que els estudiants reconeixen, gràcies al context utilitzat, promou relacions i estratègies, dites informals, que són personals i al mateix temps collectives. Aquestes cal evidenciar-les acuradament per assolir la finalitat que perseguim d'arribar a raonaments formals. Per això, el procès és interaccionista i al mateix temps constructivista. El docent introdueix formes de simbolització i ajut al raonament (gràfiques, taules, etc) i ajuda a orientar el procés formal. En aquest procés, es produeix una negociació, que de vegades és complicada, perquè els estudiants no accepten amb facilitat les propostes de simbologia proposades.

La seqüència general de la què parlem, ha estat realitzada amb alumnes de 2n d'ESO, que mai havien estudiat àlgebra. Amb aquest treball ha estat possible que cada alumne, segons les seves possiblitats, desenvolupi el raonament algèbric, arribi a trobar significats a les fòrmules, interpreti el llenguatge algèbric com una eina per a la modelització i que sigui capaç de treballar processos de generalització.

1. DE LES PIZZES I AMANIDES A LES EXPRESSIONS

Les primeres activitats que proposem tracten d'una situació real en un context molt simple i conegut pels nostres alumnes, per plantejar-los una sèrie de qüestions des de molt senzilles fins a més complicades. Volem insistir en el fet de que el context triat és especialment important pel bon funcionament de l'activitat. Aleshores, els proposem el següent enunciat:

Un determinat establiment del poble ofereix 2 pizzes i 3 amanides per 19,90 euros. A partir d'aquesta informació, respon raonadament.

1. Pots saber el que costa 1 pizza i 2 amanides?

2. Pots dir el que costen 4 pizzes i 6 amanides?

3. Explica què més puc saber amb aquestes dades. Per exemple, raona que una amanida no pot costar més de sis euros.

4. Digues 5 possibles preus de l'amanida i els corresponents preus de cada pizza.

En aquest tipus d'activitat, tot l'alumnat pot contestar a aquest model de preguntes, i en tot cas, el que els distingeix és el nivell i cura de l'argumentació de les respostes.

Després que els alumnes responguin individualment, es fa una discussió oral amb tot el grup on es reconeix, que el context real de la situació imposa restriccions a les solucions. Així, l'alumnat observa des de la pràctica i sense dificultat aspectes com els següents:

- Que no es poden saber els preus amb exactitud, en diversos casos, perquè falten dades i, per tant, hi ha diferents solucions possibles.
- Que les solucions es troben sovint restringides a un interval de valors, segons diferents criteris: els preus no poden ser negatius, el preu de l'amanida no pot ser superior al de la pizza, a la realitat no s'acostumen a donar preus que no siguin multiples de 5 cts, etc.
- Que podem fer afirmacions a partir d'altres afirmacions.

Cal dir, també, que l'alumnat reconeix immediatament que assignar un valor a les pizzes implica un valor determinat per les amanides. I això és el que els professors en diem el valor funcional de les expressions.

Aquesta introducció a l'activitat algebraica permet fer unes reflexions matemàtiques que no es donen d'una altra manera amb els planteigs clàssics. Per exemple, els lectors reconeixereu que discutir sobre els possibles valors dels preus de les pizzes i amanides afavoreix la consideració del que matemàticament en diem identificar el domini de les variables.

Aquests diàlegs de grup són importants perquè inclouen una de les claus del pensament algebraic: reconèixer que la representació que després escriurem en forma d'equació, és un model de la realitat i per tant la significació dels valors de les lletres i expressions és el que alguns autors en diuen significat dels símbols i les variables (Schoenfeld i Arcavi,,1988).

Tot això que ara comença a sortir es desenvoluparà i ampliarà en unes tres sessions amb més activitats d'aquest estil. Per exemple: si sabem que 3 pizzes i 9 amanides costen 40,20 euros, quant costen 2 pizzes i 6 amanides?

Acabem preguntant què podem concloure si considerem les dues informacions alhora. Els alumnes s'adonen, de diverses maneres, que poden estar segurs llavors del preu de cada producte. Reconeixen el significat de treure conclusions simbòliques a partir d'altres (Lins i Giménez 2001)

En aquesta discussió queda clar què vol dir conèixer amb certesa un resultat a partir de les dades de l'enunciat.

Introduim aleshores l'enunciat següent: "imagina't que sabem que 4 pizzes i 4 amanides costen 35,2 euros. Amb aquesta informació i la d'abans pots saber el que val cada pizza i amanida?" Sempre hi ha alumnes que ens sabran trobar la resposta!

Aquests tipus d'activitats senzilles, fomenten la participació de tot l'alumnat, però al mateix temps ens permet avançar en l'aprenentatge de la resolució de problemes. Així, s'aconsegueix:

- Deduir noves informacions a partir de les dades que ens donen a la situació inicial, com per exemple establir possibles preus diferents d'amanides i pizzes.

- Escriure diferents relacions entre les variables, incloses les desigualtats.

- Reconèixer que no sempre és possible saber el què volem, que es necessita que es compleixin determinades condicions, com per exemple que no podem saber el preu d'una pizza només amb la informació de la primera activitat.

- Si ens donen dues condicions, podem obtenir noves condicions vàlides sumant o restant les condicions donades al problema. En el nostre cas, a partir del primer i últim exemple, podem saber que 6 pizzes i 7 amanides costen 55,1 euros si sumem les dues condicions donades.

- Reconèixer la variabilitat de solucions en el cas de una condició i dues variables i la possibilitat de solució única en el cas que es donin dues condicions.

- Identificar que, en alguns casos, podem substituir alguna condició reduint el problema a una variable. Per exemple si la segona condició donada hagués estat que 2 pizzes i 2 amanides costen 17,6 euros resultaria raonable escriure que els alumnes descobreixin el preu d'una amanida ràpidament.

S'ha treballat també altres aspectes que no podem dir tant clarament que hagin estat assumits per tothom, com la idea d'equivalència, perquè hauran pogut veure que si multiplico o divideixo els dos membres d'una expressió per una mateixa quantitat, obtindré una expressió equivalent.

És important que els alumnes practiquin amb diferents tasques d'aquest tipus per consolidar aquests coneixements que són importants en la resolució de problemes i, d'aquesta forma, activar la manipulació d'expressions algebraïques. A partir d'aquestes tasques, s'aprofundeix en el llenguatge simbòlic.

2. PARLEM D' EQUACIONS

Un altre moment que destaquem és el reconeixement del valor dels mètodes heurístics quan fem servir el llenguatge simbòlic. Així, quan les expressions corresponents a preus es converteixen en equació, abans de començar a aplicar la mecànica de resolució, ens sembla important fer una exploració sobre quins valors pot tenir la solució. A continuació parlarem, per tant, d'aquest moment, en el què ja tenim una expressió algebraica, és a dir, una igualtat amb lletres. Deixem per un altre escrit l'explicitació de com arribem a aquesta formulació. Però el lector ja podrà veure insinuat que passa per escriure les relacions numèriques en forma de matriu d'una fila, com feien els xinesos (Streefland & Van Ameron 1996).

A partir de les observacions realitzades, fem una exploració sobre els valors que pot tenir la solució d'una equació. Proposem, aleshores als alumnes la següent equació: $3x+5=2\cdot(x-8)$ i els demanem que responguin a les següents preguntes:

a) Explica per què la x no pot ser un nombre entre 0 i 8.
b) Explica per què la x no pot ser 9.
c) Observa que si la $x=9$ el terme de la dreta fa 2 i el de la esquerra fa 32. Si la $x=10$ el terme de la dreta fa 4 i el de l'esquerra fa 35. Explica aleshores per què pots dir amb seguretat que la x no pot ser un nombre més gran que 9.
d) Explica per què la x ha de ser un nombre negatiu.
e) Explica, sense fer totes les operacions, per què la x no pot ser un nombre negatiu com -1 o -2.
f) Observa que si la $x= -22$ el terme de la dreta fa -60 i el terme de l'esquerra fa -57. Explica a partir del que ja saps, a quin interval es pot trobar el valor de la x.

Fixem-nos que les preguntes són similars a les que hem plantejat en l'activitat contextualitzada en les pizzes. Aquestes mateixes preguntes ens portaran als mètodes heurístics que comentarem en la secció següent.

Amb aquestes reflexions ajudem a reconèixer que el procés de resolució d'equacions ja no es una mera mecànica, sinó que té a veure amb una comprovació dels valors de les variables que compleixen unes determinades condicions. És a dir, entenem una equació com l'expressió en llenguatge simbòlic d'una determinada condició.

3.- Introduim mètodes heurístics

Entenem que els alumnes han de conèixer i saber utilitzar diferents mètodes per resoldre equacions. Tots ells són vàlids i potents i seran més o menys adequats depenent de la situació.

A més des del punt de vista didàctic, els mètodes heurístics ens permeten entendre el que significa resoldre una equació. Independentment del que vulguem fer perquè els alumnes treballin la resolució d'equacions amb l'ajuda d'equacions equivalents, els mètodes de tempteig i gràfics no només són més senzills sinó que per a més d'un li permetran no quedar-se exclòs de l'activitat

El mètode de tempteig

Després d'haver valorat el significat i els contextos no us hauria d'estranyar que

una alumna (la Clara) resolgui una equació com veieu a la figura 1. Altres alumnes van donar respostes similars.

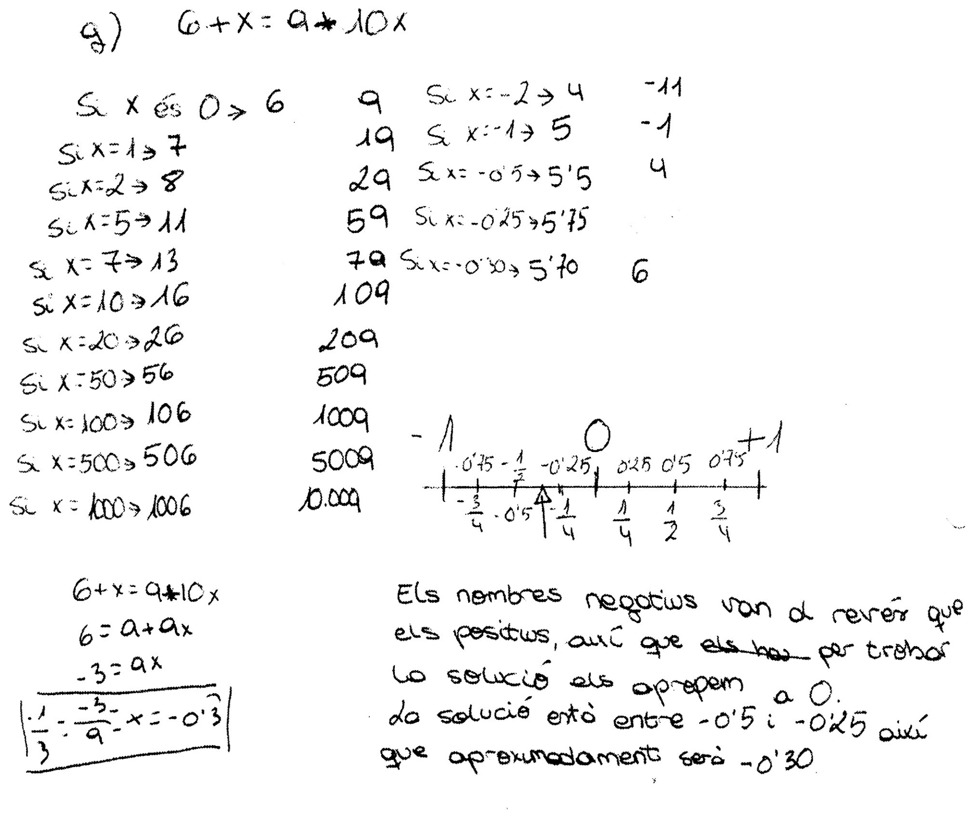

Figura 1 Resposta de la Clara davant l'equació 6+x=9+10x. Se li demanava explícitament que usés dos mètodes per a trobar el valor de la x.

La resposta de la Clara és completa i d'alt nivell: en primer lloc, va temptejant possibles solucions de l'equació. Comença pel valor x=0 i comprova el resultat de cada membre de l'equació; va augmentant el valor possible -arriba a provar x=1000-, tot veient que cada vegada el valor d'un membre de la igualtat s'allunya de l'altra. Llavors s'adona que el valor de la variable x ha de ser necessàriament negatiu, i prova amb els valors -2 i -1. La Clara observa que els valors dels dos membres de la igualtat es van acostant, i descobreix que la solució de l'equació ha de ser un nombre decimal negatiu.

La Clara atura el tempteig i escriu unes frases molt interessants. En primer lloc, afirma que “els nombres negatius van al revés que els positius”, la qual cosa justifica per a ella que el valor ara “s’apropi a zero”. I conclou dient que “la solució està entre -0,5 i -0,25, així que aproximadament serà -0,30”.

La rotunditat d’aquestes tres afirmacions anteriors, en una alumna que fa per primera vegada a la seva vida la resolució d’equacions, i el grau d’aprofundiment que mostra en tot el seu raonament, justifica la conveniència de treballar aquestes propostes didàctiques.

Finalment, usant el mètode que vam treballar en la sessió anterior de classe, resol l’equació i comprova que el resultat, efectivament, és -1/3. És de destacar que usa l’aïllament de la variable x com a comprovació. Hi ha alumnes que quan aïllen una variable temen sempre haver comès un error i no mostren cap seguretat. En canvi, amb el tempteig, la seguretat en haver trobat un bon resultat acostuma a ser absoluta.

El procés que ha seguit la Clara és prou clar. Ha estat sistemàtic i reflexiu. Altres no ho són tant, i ho escriuen de forma més abreujada, però no deixen el full en blanc.

El mètode gràfic

En un altre moment demanem que, donada l’equació $5x-6=2x+27$, calculin els resultats de cada membre per a diferents valors de la variable x. Es recullen en una taula com la següent:

	Membre esquerra	Membre dreta
X	5x-6	2x+27
0	-6	27
1	-1	29
2	4	31

A la vista de la taula, mostrem als alumnes que per cada valor de la variable x ens apareixen dos valors, un del membre de la dreta i l’altre del de la esquerra. Això admet una representació per punts en uns eixos de coordenades, i en el moment que s’igualin els dos valors serà el punt de tall de les dues gràfiques. A la figura 2, podem veure la solució d’un alumne.

Figura 3 Ajustament que fa en Gerard per a trobar la solució del problema plantejat amb ajut del mètode gràfic.

Com es pot observar a la figura, Gerard comença per donar valors a la variable x i veure el resultat de cada membre de la igualtat. Cada valor el representa en uns eixos de coordenades, i cada grup de valors de cada membre es converteix així en una recta. Evidentment, en el punt en què es trobin les dues rectes, tindrem la solució de l’equació. Amb aquest mètode, els alumnes treballen la idea d’iteració a partir d’observar la confluència de les dues gràfiques. Trobar la solució d’una equació no és una simple habilitat amb operacions, ni un joc de mans sense cap mena de significat ni de possible representació visual. Reforcem, així, les representacions algebraiques i el valor dels diferents mètodes.

4. CONCLUSIÓ

Amb els exemples presentats no s’acaba el treball algèbric. En aquestes línies, us hem presentat alguns exemples d'activitats potencialment riques, dins d'una unitat introductòria de l'àlgebra a primer cicle de l'ESO. Ens hem basat en la idea de contextualizar i potenciar raonaments heurístics, per tal d’animar-vos a que ho tingueu en compte.

La idea de contextualitzar és vella, i tanmateix sovint no es té en compte quan es pensa en fer un treball algèbric. Diversos autors expliquen que tota acció humana depèn del context. Les funcions d'explorar i experimentar són humanes en tant que les podem modelitzar. Aquest procés de modelització el fem a partir de la familiaritat, de la interpretació del fenòmen per mitjà de l'anàlisi i de la relació amb el que altres han descobert prèviament. És per això que fa temps que alguns pensem que no té sentit parlar d'expressions algèbriques sense parlar de pizzes o problemes similars. Igualment, no podem parlar de resoldre equacions sense parlar de la validesa de les expressions quan les vinculem a situacions concretes i a mètodes heurístics.

D'altra banda, totes les activitats que hem presentat les hem portades a classe tenint especial cura del diàleg com a centre de l'activitat matemàtica, entenent que qualsevol acció pràctica és fonamentalment discursiva. El discurs, però, ha d'estar vehiculat per sistemes de signes que no sempre són completament compresos si no entenem abans els sistemes de pràctiques d'aquests signes. Això és molt important quan parlem d’àlgebra, perquè el primer que els alumnes fan és parlar de les seves respostes als problemes. I posteriorment, usen les formes simbòliques típiques de les lletres i les equacions. Si l’alumnat no fa connexions entre els sistemes de signes de les seves explicacions i els significats matemàtics d’igualdat, d’equivalència, no entendran res del valor de l’àlgebra.

Però, hem de tenir en compte, que les formes que té l’alumnat d’interactuar amb el context és força individual, i no tothom interpreta els contextos de la mateixa manera. I no tothom es desprèn dels contextos de la mateixa manera. Per això, la varietat dels contextos no només ens dona l’oportunitat de proposar situacions diferents amb diferents continguts associats, sinò que els contextos ajuden els alumnes diferents a anar copsant el valor de les relacions matemàtiques que els proposem de treballar. Per tant, només parlar de pizzes i amanides no resol el problema, però és el context que hem escollit aquí per comentar. A la pràctica fem servir també altres, com per exemple descobertes històriques (Grup Vilatzara 2006).

L’altre aspecte a remarcar, és tenir present el rol central que ocupa el professor en la mediació entre les matemàtiques que ensenyem a l'escola i la realitat que perceben els alumnes. El paper del professor és clau per a que els alumnes es desprenguin de les pizzes i de les amanides i passin a reconèixer el valor de les equacions, i és el docent qui ha de fer possible que això es produeixi fomentant la col.laboració i interacció natural entre l'alumnat. L'activitat matemàticament rica, ho és en tant l'ensenyant permeti desenvolupar els nivells de competència matemática diferents del conjunt del grup. Això s'ha aconseguit força en l'experiència que us hem comentat. En efecte, s'ha permès usar mètodes d'assaig-error, respostes verbals, gràfics, etc. I d'aquí passem al valor de les expressions més simbòliques.

Les pizzes i amanides permeten treballar amb un domini matemàtic dels decimals, que és un bon pas cap al continu de les solucions posteriors amb nombres reals. D'altra banda, us hem començat mostrant com, aprofitant el context de pizzes i amanides es permet identificar diferents significats i representacions de les variables en situacions algebraïques. Simultàniament, els alumnes se n'adonen que en el moment que fem afirmacions generals sobre expressions algèbriques ens limita els possibles valors que poden prendre les variables.

També hem de reconèixer que el valor dels mètodes heurístics emprats és que són útils en ells mateixos en el moment que ens permeten resoldre diferents situacions problemàtiques. Però, a més, emprant els mètodes heurístics aconseguim que l'alumnat representi, analitzi i generalitzi a partir d'una varietat de patrons observats en taules, gràfiques i, en ocasions, regles expressades tant en llenguatge natural com simbòlic.

Els mètodes heurístics són també l'element que ens permet connectar diferents formes de representació. Hem de tenir present, però, que junt amb els mètodes heurístics hem d'anar introduint aspectes que el mètode no necessàriament ens porta espontàniament. Per exemple, és important que simultàniament a la iniciació dels mètodes heurístics introduïm l'ús de taules com element que facilita l'organització de les dades, i permet així arribar més fàcilment a l'obtenció de conclusions.

Amb el treball heurístic realitzat, s'aconsegueix dotar els alumnes d'elements de judici per jutjar el significat i la utilitat de les relacions emprades així com dels resultats dels problemes plantejats, en particular dels resultats que ens proporcionaria després la tecnología, si poséssim les dades en un programa del tipus "full de càlcul".

Cal assenyalar també que en totes les activitats presentades els alumnes usen l'àlgebra per a representar situacions i per resoldre problemes, especialment aquells que involucren relacions lineals entre les variables. Tanmateix, el ventall de representacions emprades, però, no es limita al llenguatge simbòlic, sinó que, com hem vist, incorpora tota una varietat d'elements, com són: el llenguatge gràfic, l'ús de taules, les expressions verbals i el llenguatge simbòlic, L'ús d'aquests diversos llenguatges en aquestes activitats, els permet reconèixer i generar formes equivalents d'expressar les relacions entre les variables, i també resoldre equacions i sistemes simples. La resolució de problemes algèbrics arriba, però, no d'una manipulació formal de símbols, sinó d'una comprensió de les relacions involucrades.

Finalment, diguem que, amb la nostra proposta, els alumnes identifiquen relacions funcionals com a relacions lineals a partir de les propietats observades en taules, gràfiques i expressions simbòliques. I hem aconseguit que generalitzin de forma natural els patrons donats a partir de funcions definides explícitament.

5. REFERÈNCIES

Schoenfeld, A. H.,Arcavi,A.(1988)On the meaning of variable. *Mathematics Teacher,* 81(6):420-427

Giménez,J i al. (1988) *Variables en àlgebra. Un estudi realitzat a les escoles de l'Anoia*. ICE UPC.

Gravemeijer K., McClain K. & Stephan M. (1998) "Supporting student's construction of increasingly sophisticated ways of reasoning through problem solving", handout from Frank Eade & Barbara Craig, Teaching Studies unit, MMU Didsbury 2004

Kindt, M.,MAbels, M.R. Meyer, and M. Pligge (1998), *Comparing Quantities*, In: NationalCenter for Reserach in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5-8*. Chicago: Encyclopedia Brittanica Educational Corporation

Kindt, M (2004) *Realistic Mathematics Education in a UK Secondary School*. Documents from a meeting. Consultat el 4-11-05. Disponible a http://s13a.math.aca.mmu.ac.uk/Student_Writings/TS1/VinceMartin.html.

Lins,R, Gimenez,J (2001) *Perspectivas em aritmética e algebra para o século XXI*. São Paulo. Papirus. 4a. Edició.

Monográfico sobre matemáticas y contexto (2004). Revista UNO de Didáctica de las Matemáticas. Barcelona.

Streefland,L & Van Ameron,A (1996) Didactical phenomenology of equations. In Gimenez, Lins and Gomez (eds) *Arithmetics and algebra education. Searching for the future*. Computer Engeniering Dept. Tarragona.

Van Reeuwijk M. (1995) "*The role of realistic situations in developing tools for solving systems of equations*", paper presented at the 1995 annual AERA conference in San Francisco.

Vilatzara, Grup (2006) *Viaje y matemáticas*. FESPM. Badajoz.