Álgebra en contexto

Grup Vilatzara (ICE UAB)

Xavier Vilella[1], Manel Sol[2], Pedro Cobo, Jordi Comellas, Joaquim Giménez, Ampar López, Yuli Marsela, Rosario Martín, Eva Roca, Elisa Sala, Jaume Serra, Marc Vilanova, Sol Vilaplana.

[1] IES Vilatzara 08340 Vilassar de Mar xvilella@xtec.cat

[2] IES Vilatzara 08340 Vilassar de mar msol@xtec.cat

Introducción

¿Alguien puede pensar que si se hubieran dedicado más horas a la resolución de ecuaciones en la ESO los resultados de algunos problemas que se proponen en pruebas y tests hubiesen sido mucho mejores? El alumnado tiene dificultades ante situaciones problema de tipo algebraico que son debidas a que se desenfoca los objetivos prioritarios curriculares de resolver situaciones en contextos próximos al estudiante mediante ecuaciones.

Las dificultades de nuestro alumnado no se deben tanto a la resolución mecánica de ecuaciones de primer grado como la que el problema plantea, sino a la dificultad de usar su conocimiento matemático en un contexto distinto de aquel que se utilizó en el aula para su aprendizaje.

Si la solución no es dedicar más tiempo a la resolución mecánica de ecuaciones, ¿de qué se tratará? ¿Qué decisiones debe tomar el profesorado para poner remedio a esta situación?

El Grup Vilatzara ha dedicado algunos años a estudiar la secuencia de entrada en el álgebra en la ESO y ha preparado una manera alternativa de comenzar su estudio en el aula.

Desde nuestro punto de vista el aprendizaje debe iniciarse en un contexto, con significado para el alumnado. En este contexto, la construcción del conocimiento algebraico se produce dándole al alumnado un gran protagonismo. No es un simple actor pasivo receptor de conocimiento ya elaborado presentado por el profesorado, sino que en la situación que se le propone deberá reconstruir este conocimiento en el cual su papel será activo y determinante.

Este planteamiento responde a nuestra concepción del álgebra, una concepción que se basa en priorizar el estudio de las relaciones por encima de la tradicional visión del álgebra como un simple lenguaje, en el que el papel del profesorado sería enseñar al alumnado a traducir el lenguaje natural a lenguaje simbólico. Sólo hay que observar la forma como plantean la mayoría de libros de texto este proceso inicial de entrada al álgebra para darse cuenta de la visión tradicional imperante mayoritariamente en la ESO.

Veamos algunos ejemplos de cómo empieza el álgebra en diversos libros de texto de 1º y 2º de la ESO.

Primer ejemplo: éste es el primer ejercicio que se presenta al alumnado en la primera página del capítulo que inicia el álgebra.

> *"Nos faltan 60 kilómetros para llegar a Santiago de Compostela y queremos recorrerlos en 3 días.*
>
> *El primer día recorreremos el triple que el segundo y el segundo, la mitad que el tercero. ¿Qué distancia recorreremos cada día?"*

Se supone que este ejercicio muestra al alumnado la gran utilidad del álgebra para resolver problemas…

Segundo ejemplo: en otro libro de texto, se empieza, en el primer apartado del capítulo, como es habitual, por definiciones y normas, hablando de expresiones algebraicas y transposición de términos. Llegados al segundo apartado, unas pocas páginas más adelante, y bajo el título de "Ecuaciones **de primer grado** con una incógnita", presentan el punto "2.1 El lenguaje de las ecuaciones" y en él escriben:

> *"Si relacionamos con el signo igual dos expresiones algebraicas,* $4x-2$ *y* x^2+1*, obtenemos una ecuación:* $4x-2 = x^2+1$*"*

La primera ecuación que el alumnado leerá es: $4x-2 = x^2+1$. Como puede verse, no hay significado: ¿para qué?, si el álgebra sólo debe ser un lenguaje, con su análisis morfológico y sintáctico, sus normas ortográficas y sus definiciones...

Tercer ejemplo: en otro libro de texto, el planteamiento parece acercarse al nuestro, porque el inicio del álgebra se liga con la resolución de problemas. Se plantea al alumnado la resolución de primer problema parecido al nuestro de las pizzas y los refrescos… pero con una salvedad: se presenta el enunciado y, debajo mismo, ¡la resolución, paso por paso! Es decir, no se ofrece ni tan siquiera la oportunidad de que algún alumno o alumna lo resuelva sin conocer de antemano el camino "oficial". En el fondo, lo que parece es que no se confía en absoluto en que el alumnado sea capaz de resolverlo. Con ello se niegan las oportunidades para que cada alumno y alumna cree sus propias representaciones, que vayan evolucionando, que se negocien entre iguales, que se comparen caminos diferentes de solución. Si se establece el camino del libro, del profesor o profesora, difícilmente se plantee otro alternativo. Este planteamiento es completamente reproductivo: lo único que se pide al alumnado es que reproduzca fielmente lo que se ha presentado.

Nuestra propuesta

En una comunicación resulta imposible presentar toda la secuencia que hemos elaborado, por lo que nos limitaremos a presentar algunos de los primeros pasos de ésta.

Los ejemplos que presentamos se refieren al 2º curso de la ESO; trabajamos con grupos heterogéneos de alrededor de 25 alumnos por clase.

La secuencia contiene diversos contextos, que van de lo concreto a lo abstracto, siguiendo el proceso descrito por Treffers (1987) de matematización horizontal y vertical. Así pues, partimos de un primer contexto muy concreto de una situación muy conocida por el alumnado, como es la compra de pizzas y refrescos (Grup Vilatzara, 2005). Pasamos enseguida a la abstracción de este primer paso, mediante la presentación de los coeficientes de un sistema de ecuaciones, representación del problema concreto resuelto en el primer contexto. En el siguiente paso, volvemos a presentar una situación - problema en un nuevo contexto concreto y cercano al alumnado, las tarifas telefónicas de móviles. Aquí llegamos a la solución gráfica de un sistema de ecuaciones y a las primeras representaciones simbólicas de la relación entre dos variables mediante la ecuación de la función. Pasamos de nuevo a la abstracción, esta vez usando las series de valores colocados en una tabla que deben completarse. A partir de aquí, el alumnado es capaz de trasponer la representación gráfica realizada en la situación en contexto anterior a la nueva situación en un contexto matemático.

De esta manera, pasamos alternativamente por situaciones contextualizadas que introducen con significado los nuevos conceptos y relaciones del álgebra, seguidas por fases de abstracción.

Introducción del lenguaje simbólico

La primera situación contextualizada acaba con la resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas[1]. En todo este proceso, el alumnado no ha usado ni se le han presentado las dos letras x e y. Lo resuelven en base a las ideas previas sobre aritmética y proporcionalidad, sin necesidad de plantear en ningún momento un sistema clásico. En realidad, los trabajos del alumnado muestran claramente que van evolucionando en cuanto a las representaciones usadas para afrontar las sucesivas situaciones a resolver, pasando desde el dibujo de los objetos, hasta formas cercanas al lenguaje simbólico tradicional (figura 1).

---

[1] Para profundizar más en esta primera fase, ver "Los íberos, las pizzas y los refrescos: el álgebra, más allá de las ecuaciones", en las Actas de las XII JAEM, Albacete, 2005.

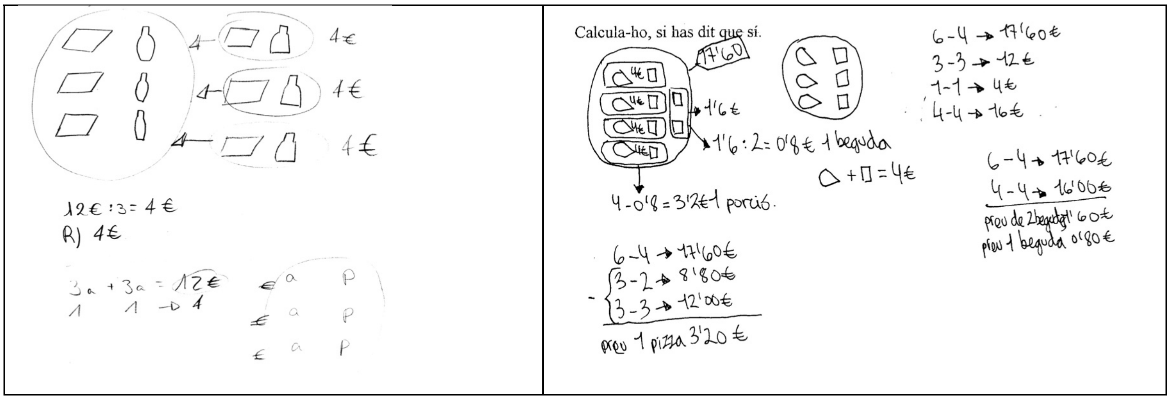


Figura 1

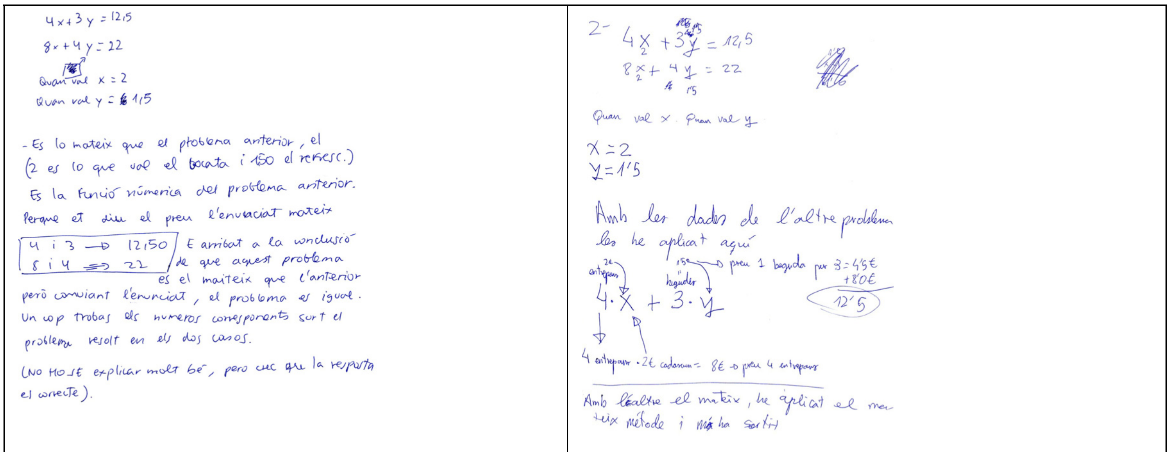
Una vez acabada esta fase, se presenta al alumnado una nueva situación, cambiando los objetos (por ejemplo, lápices y bolígrafos).

1. *Ayer compramos 4 bocadillos y 3 bebidas y nos costaron 12,50 €. Hoy hemos comprado 8 bocadillos y 4 bebidas y nos han costado 22 €. Calcula el precio de un bocadillo y el precio de una bebida.*

En general no muestran grandes dificultades en resolverla, puesto que aplican lo que ya han aprendido. Como segunda pregunta, se les plantea el siguiente enunciado:

2. $4\,x + 3\,y = 12{,}5$
   $8\,x + 4\,y = 22$ *¿Cuánto vale x? ¿Cuánto vale y?*

No se ha introducido previamente, en ningún caso, el significado de estas letras, ni ninguna regla de transposición de términos, ni de resolución de sistemas. Con los conocimientos adquiridos en la primera fase, el alumnado no encuentran dificultades para reconocer que la situación con las incógnitas x e y es similar a la anterior, y resuelven el sistema (figura 2).



Traducción: *"Es lo mismo que el problema anterior, el 2 es lo que vale el bocata y 1,50 el refresco. Es la función numérica del problema anterior. Porque te dice el precio el enunciado mismo. He llegado a la conclusión de que este problema es el mismo que el anterior, pero*	Traducción: *"Con los datos del otro problema los he aplicado aquí (...) Con el otro, lo mismo, he aplicado el mismo método y me ha salido"* A señalar: interpreta la *x* como *el precio* del bocadillo, no como *el bocadillo*, y lo mismo con la *y*.

cambiando el enunciado, el problema es igual. Una vez encuentras los números correspondientes, sale el problema resuelto en los dos casos. (No lo se explicar muy bien, pero creo que la respuesta es correcta)"	

Figura 2

En el enfoque tradicional, se empieza por la presentación de unas incógnitas (y se definen términos como ecuación, solución de ecuación, identidad, etc.) se trabaja con un nuevo lenguaje, con sus normas ortográficas y sintácticas (las reglas de manipulación de ecuaciones).

En nuestro enfoque, empezamos con los significados y la resolución de problemas, para la cual el pensamiento algebraico es de gran ayuda. En este planteamiento, la introducción del lenguaje simbólico y las reglas de manipulación (en una primera etapa) surgen de forma natural, a partir de los conocimientos previos y del reto que representa la resolución de los problemas planteados.

Por otro lado, empezamos con las relaciones entre variables, trabajamos la dependencia funcional. La ecuación de primer grado se trabaja a partir también de la relación entre variables, no como un conjunto de reglas sin sentido ni como la manera de resolver problemas de una gran pobreza, como los siguientes ejemplos extraídos de textos usados en la ESO:

> *"Un jardín triangular tiene dos lados en ángulo recto. Uno de estos lados mide 3 metros de largo y el otro lado 5 metros de largo. Calcula el área del jardín"*
>
> *"En una fiesta hay un número determinado de personas. Llegan a ella 26 personas más y ahora hay el triple de las que había en el inicio. ¿Cuántas personas había al comenzar la fiesta?"*
>
> *"Calcula cuál es el precio de un libro sabiendo que un quinto, más un sexto, más un séptimo del precio menos 60 céntimos de euro suman la mitad del precio"*

¿Qué aprende el alumnado?

Si estamos de acuerdo en que el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas, en el actual currículo, es el desarrollo de las competencias matemáticas, nuestro planteamiento adquiere todo el sentido.

Pensamos, con Sol (2009), que las competencias matemáticas que intervienen en todas las actividades de aprendizaje matemático pueden agruparse en tres bloques principales:

- pensamiento y razonamiento matemático
- resolución de problemas y modelización
- comunicación de ideas matemáticas

A través de las actividades que se proponen, podemos reconocer su desarrollo en las actividades que se desarrollan en el aula.

El desarrollo del pensamiento matemático y el razonamiento puede apreciarse cuando el alumnado es capaz de formular una hipótesis, conjeturar, validar, comprobar, clasificar, ejemplificar, generalizar etc. En distintos momentos de la actividad en clase podemos reconocer estas acciones. Por ejemplo, ante una situación real los alumnos se plantean un problema.

- El problema que ens plantegem és saber el percentatge de lo que mengen respecte el seu pes. Per exemple, si un animal pesa 10 kg i menja 1kg fem 1x100/10, que el resultat és el percentatge de lo que menja respecte el seu pes, que dona 10%.

Traducción: El problema que nos planteamos es saber el porcentaje de lo que comen (los animales) respecto de su peso. Por ejemplo, si un animal pesa 10 kg y come 1 kg hacemos 1x100/10, que el resultado es el porcentaje de lo que come respecto de su peso, que da 10%.

O este otro ejemplo: A los alumnos se les pide que resuelvan estos ejercicios sin que se les haya hablado de ningún método de resolución de ecuaciones. El estudio previo que han realizado los alumnos ha consistido en las relaciones entre las variables que intervienen en las situaciones planteadas. Para encontrar la solución los alumnos no pueden emplear ningún proceso mecánico porque no los conocen, únicamente pueden razonar como se observa en la figura 3.

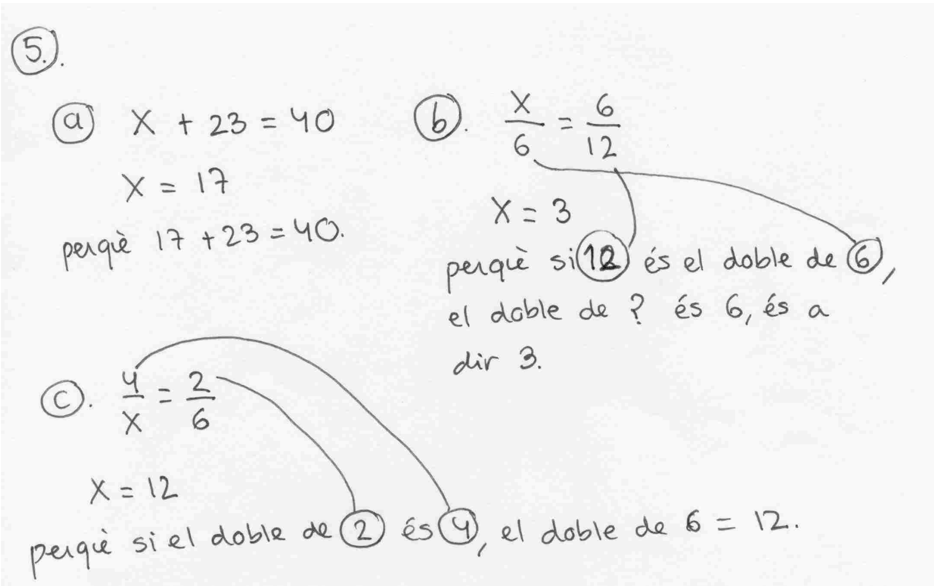
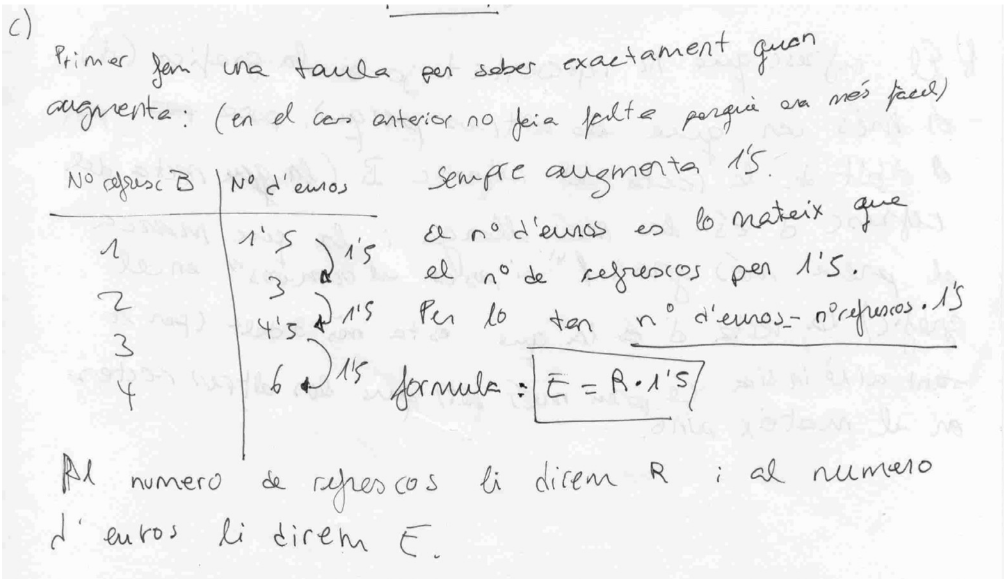


Figura 3

El desarrollo de la competencia en resolución de problemas se reconoce entre otras acciones por las estrategias empleadas, la selección de modelos matemáticos adecuados a la situación, selección de variables, interpretación de resultados, construcción de modelos. Ejemplos de ellos desbordan las posibilidades de esta comunicación.

El desarrollo de la competencia en comunicación de ideas matemáticas se reconoce a través de las acciones como por ejemplo el uso de registros diferenciados, la decodificación de formalismos, la representación de objetos matemáticos, la argumentación.


c)

Primer fem una taula per saber exactament quan augmenta: (en el cas anterior no feia falta perquè era més fàcil)

Nº refresc R	Nº d'euros
1	1'5
2	3
3	4'5
4	6

Sempre augmenta 1'5.
el nº d'euros es lo mateix que el nº de refrescos per 1'5.
Per lo tan nº d'euros = nºrefrescos · 1'5
formula: $\boxed{E = R \cdot 1'5}$

Al numero de refrescos li direm R i al numero d'euros li direm E.

Figura 4

Traducción: Primero hacemos una tabla para saber exactamente cuanto aumenta: (en el caso anterior no hacia falta porque es más fácil). Siempre aumenta 1,5. El nº de euros es el mismo que el nº de refrescos por 1,5. Por lo tanto nº euros = nº refrescos · 1,5. Formula E=R·1,5. Al número de refrescos lo llamaremos R y al número de euros lo llamaremos E.

En la figura 4 se puede observar un fragmento del trabajo de un alumno en el que se puede reconocer su competencia en argumentar, en decodificar diferentes tipos de lenguaje, y en el uso de diferentes tipos de registros (tabla, lenguaje simbólico i natural).

Hay que destacar que el desarrollo de las competencias matemáticas colabora también al desarrollo de las 8 competencias básicas que deben ser impulsadas desde todas las áreas. No podemos presentar una justificación más detallada de ello pero sí que lo queremos mencionar ya que sitúa nuestra tarea de educadores en matemáticas en una perspectiva más amplia como es la de formar ciudadanos competentes para participar, cuando sean adultos, en una sociedad democrática.

Conclusiones

La propuesta que presentamos:

- desarrolla competencias matemáticas de alto nivel y colabora en el desarrollo de las competencias básicas

- permite un aprendizaje más duradero dado que en el proceso de reconstrucción del conocimiento el alumnado tiene un papel protagonista y muy activo
- facilita la integración de todo el alumnado, puesto que las actividades permiten diferentes niveles de representación y de resolución
- presenta al alumnado el álgebra no como una rutina sin sentido, sino como un eficaz instrumento al servicio de la resolución de problemas

Bibliografia

Grup Vilatzara. ICE UAB, (2005) Àlgebra a l'ESO per a tothom. Reinventant a partir del context. *Biaix*, 24, 41-47.

Treffers, A. (1987) *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht. Kluwer Academic.